

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ПО  
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ  
ПРЕДМЕТАМ  
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ  
СЕЛЬСКИХ ШКОЛ

Решения и схема оценивания  
III этапа

по математике

2024-2025 учебный год, 11 класс

## 1 есеп / Задача 1

100 парламент депутаттары бір парламент төрағасын таңдап, ал қалған 99 депутатты 11 депутаттан 9 комитетке бөлінгісі келеді (әр депутат тек қана бір комитетке кіре алады). Осыны қанша тәсілмен жасауға болады?

100 депутатов парламента решили избрать председателя парламента, а остальных 99 депутатов разбить на 9 комитетов по 11 депутатов в каждом (каждый депутат может входить только в один комитет). Сколькими способами можно это сделать?

**Ответ:**  $\frac{100!}{(11!)^9}$ .

**Решение.** Существует 100 способов выбрать председателя,  $C_{99}^{11}$  способов выбрать первый комитет,  $C_{88}^{11}$  способов выбрать второй комитет,  $C_{77}^{11}$  способов выбрать третий комитет, ...,  $C_{22}^{11}$  способов выбрать восьмой комитет и  $C_{11}^{11}$  способ выбрать последний девятый комитет.

Количество способов равно:

$$\begin{aligned} & 100 \cdot C_{99}^{11} \cdot C_{88}^{11} \cdot C_{77}^{11} \cdot C_{66}^{11} \cdot C_{55}^{11} \cdot C_{44}^{11} \cdot C_{33}^{11} \cdot C_{22}^{11} \cdot C_{11}^{11} = \\ & = 100 \cdot \frac{99!}{11! \cdot 88!} \cdot \frac{88!}{11! \cdot 77!} \cdot \frac{77!}{11! \cdot 66!} \cdot \frac{66!}{11! \cdot 55!} \cdot \\ & \cdot \frac{55!}{11! \cdot 44!} \cdot \frac{44!}{11! \cdot 33!} \cdot \frac{33!}{11! \cdot 22!} \cdot \frac{22!}{11! \cdot 11!} \cdot 1 = \frac{100!}{(11!)^9}. \end{aligned}$$

**Примерная схема оценивания.**

1. Показано, что количество способов равно

$$100 \cdot C_{99}^{11} \cdot C_{88}^{11} \cdot C_{77}^{11} \cdot C_{66}^{11} \cdot C_{55}^{11} \cdot C_{44}^{11} \cdot C_{33}^{11} \cdot C_{22}^{11} \cdot C_{11}^{11}$$

(5 баллов)

2. Получен правильный ответ

(2 балла)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

## 2 есеп / Задача 2

$$x^2 = 2024 + y!$$

теңдеуінің барлық бүтін сан шешімдерін табыңыз.

Найдите все решения уравнения

$$x^2 = 2024 + y!$$

в целых числах.

**Ответ:**  $(\pm 45, 0)$ ,  $(\pm 45, 1)$ .

**Решение.** По определению факториала  $y \geq 0$ .

Если  $y = 0$ , то

$$x^2 = 2024 + 0! = 2024 + 1 = 2025 = 45^2.$$

Значит,  $x = \pm 45$ . То есть получаем пары целых решений  $(-45, 0)$  и  $(45, 0)$ .

Если  $y = 1$ , то

$$x^2 = 2024 + 1! = 2024 + 1 = 2025 = 45^2.$$

Отсюда  $x = \pm 45$ . Таким образом, в этом случае получаем следующие пары целых решений:  $(-45, 1)$  и  $(45, 1)$ .

Если  $y = 2$ , то

$$x^2 = 2024 + 2! = 2024 + 2 = 2026.$$

В этом случае целых решений нет.

Если  $y = 3$ , то

$$x^2 = 2024 + 3! = 2024 + 6 = 2030.$$

В этом случае тоже целых решений нет.

Если  $y = 4$ , то

$$x^2 = 2024 + 4! = 2024 + 24 = 2048.$$

Целых решений нет.

Если  $y = 5$ , то

$$x^2 = 2024 + 5! = 2024 + 120 = 2144.$$

Целых решений нет.

Если  $y \geq 6$ , то  $y!$  делится на 16. В свою очередь 2024 делится на 8, но не делится на 16. Значит,  $y! + 2024$  делится на 8, но не делится на 16. То есть правая часть уравнения не может быть полным квадратом, и уравнение не имеет решения в целых числах.

### Примерная схема оценивания.

1. Правильно рассмотрен случай  $y = 0$ . (1 балл)
2. Правильно рассмотрен случай  $y = 1$ . (1 балл)
3. Показано, что при  $y = 3, 4$  или 5 нет решений. (1 балл)
4. Показано, что при  $y \geq 6$  нет решений. (3 балла)
5. Правильный ответ. (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

### 3 есеп / Задача 3

$ABC$  үшбұрышында қабырғалары  $AB = 5$ ,  $BC = 29$ ,  $AC = 30$ .  $BH$  және  $CH$  түзулері сәйкесінше  $AB$  және  $AC$  қабырғаларына перпендикуляр.  $BCH$  үшбұрышының ауданын табыңыздар.

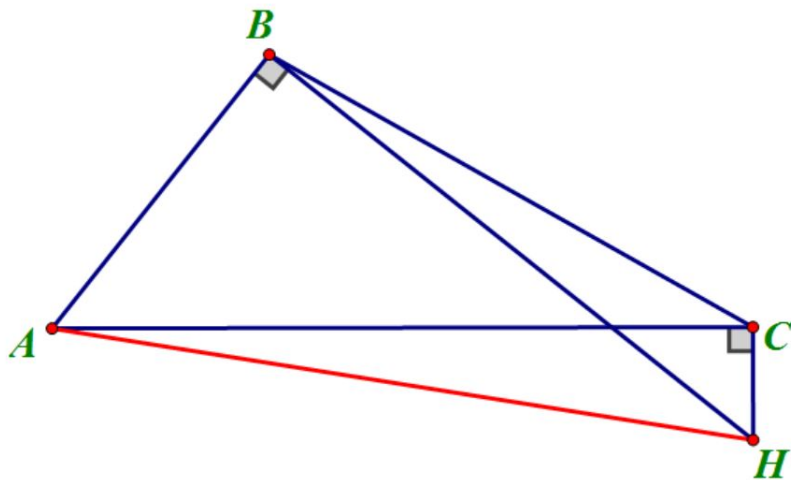
В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 5$ ,  $BC = 29$ ,  $AC = 30$ . Прямые  $BH$  и  $CH$  перпендикулярны соответственно сторонам  $AB$  и  $AC$ . Найдите площадь треугольника  $BCH$ .

**Ответ:**  $\frac{2431}{48}$ .

**Решение.** Заметим, что

$$AC^2 = 30^2 = 900 > AB^2 + BC^2 = 5^2 + 29^2 = 866.$$

Значит, треугольник  $ABC$  тупоугольный. Следовательно, чертёж к задаче будет выглядеть так, как показано на рисунке ниже:



Так как  $BH \perp AC$ ,  $CH \perp AB$ , то около четырёхугольника  $ABCH$  можно описать окружность. Тогда  $AH = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной около  $ABCH$  окружности.

По формуле Герона с учётом того, что  $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{5+29+30}{2} = 32$ ,

получаем

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{32 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{64 \cdot 81} = 8 \cdot 9 = 72.$$

Здесь  $S_{ABC}$  означает площадь треугольника  $ABC$ .

Отсюда имеем, что

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 30}{4 \cdot 72} = \frac{725}{48}, \text{ и } AH = \frac{725}{24}.$$

По теореме Пифагора для треугольников  $ABH$  и  $ACH$  находим

$$BH = \sqrt{AH^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{725}{24}\right)^2 - 5^2} = \frac{715}{24},$$

$$CH = \sqrt{AH^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{725}{24}\right)^2 - 30^2} = \frac{85}{24}.$$

Через  $S_{ABH}$ ,  $S_{ACH}$  и  $S_{BCH}$  обозначим площади треугольников  $ABH$ ,  $ACH$  и  $BCH$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} S_{BCH} &= S_{ABC} + S_{ACH} - S_{ABH} = \\ &= S_{ABC} + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CH - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BH = \\ &= 72 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{85}{24} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{715}{24} = \frac{2431}{48}. \end{aligned}$$

**Примерная схема оценивания.**

1. Показано, что треугольник  $ABC$  тупоугольный. (1 балл)
2. Показано, что около четырёхугольника  $ABCH$  можно описать окружность. (1 балл)
3. Найдена площадь  $S_{\triangle ABC}$ . (1 балл)
4. Вычислено значение  $AH$ . (1 балл)
5. Вычислено значение  $BH$ . (1 балл)
6. Вычислено значение  $CH$ . (1 балл)
7. Вычислена площадь  $S_{\triangle BCH}$ . (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.