

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ПО  
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ  
ПРЕДМЕТАМ  
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ  
СЕЛЬСКИХ ШКОЛ

Решения и схема оценивания  
III этапа

по математике

2024-2025 учебный год, 10 класс

**1 есеп / Задача 1**

100 парламент депутаттары бір парламент төрағасын таңдап, ал қалған 99 депутатты 11 депутаттан 9 комитетке бөлінгісі келеді (әр депутат тек қана бір комитетке кіре алады). Осыны қанша тәсілмен жасауға болады?

100 депутатов парламента решили избрать председателя парламента, а остальных 99 депутатов разбить на 9 комитетов по 11 депутатов в каждом (каждый депутат может входить только в один комитет). Сколькими способами можно это сделать?

**Ответ:**  $\frac{100!}{(11!)^9}$ .

**Решение.** Существует 100 способов выбрать председателя,  $C_{99}^{11}$  способов выбрать первый комитет,  $C_{88}^{11}$  способов выбрать второй комитет,  $C_{77}^{11}$  способов выбрать третий комитет, ...,  $C_{22}^{11}$  способов выбрать восьмой комитет и  $C_{11}^{11}$  способ выбрать последний девятый комитет.

Всего способов:

$$\begin{aligned} & 100 \cdot C_{99}^{11} \cdot C_{88}^{11} \cdot C_{77}^{11} \cdot C_{66}^{11} \cdot C_{55}^{11} \cdot C_{44}^{11} \cdot C_{33}^{11} \cdot C_{22}^{11} \cdot C_{11}^{11} = \\ & = 100 \cdot \frac{99!}{11! \cdot 88!} \cdot \frac{88!}{11! \cdot 77!} \cdot \frac{77!}{11! \cdot 66!} \cdot \frac{66!}{11! \cdot 55!} \cdot \\ & \cdot \frac{55!}{11! \cdot 44!} \cdot \frac{44!}{11! \cdot 33!} \cdot \frac{33!}{11! \cdot 22!} \cdot \frac{22!}{11! \cdot 11!} \cdot 1 = \frac{100!}{(11!)^9}. \end{aligned}$$

**Примерная схема оценивания.**

1. Показано, что количество способов равно

$$100 \cdot C_{99}^{11} \cdot C_{88}^{11} \cdot C_{77}^{11} \cdot C_{66}^{11} \cdot C_{55}^{11} \cdot C_{44}^{11} \cdot C_{33}^{11} \cdot C_{22}^{11} \cdot C_{11}^{11}$$

**(5 баллов)**

2. Получен правильный ответ

**(2 балла)**

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования **0 баллов**.

**2 есеп / Задача 2**

$$x^2 - 7x + 3 = y^2$$

теңдеуінің барлық бүтін сан шешімдерін табыңыз.

Найдите все решения уравнения

$$x^2 - 7x + 3 = y^2$$

в целых числах.

**Ответ:**  $(13, 9), (13, -9), (-6, 9), (-6, -9)$ .

**Решение.** Умножим обе части уравнения на 4:

$$4x^2 - 28x + 12 = 4y^2$$

Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$(4x^2 - 2 \cdot 2 \cdot 7x + 7^2) - 7^2 + 12 = 4y^2,$$

$$(2x - 7)^2 - 4y^2 = 37,$$

$$(2x - 7 - 2y)(2x - 7 + 2y) = 37.$$

Числа  $(2x - 7 - 2y)$  и  $(2x - 7 + 2y)$  являются целыми, и при этом являются делителями простого числа 37. Поэтому получаем следующие числа.

**Случай 1.**

$$\begin{cases} 2x - 7 - 2y = 1, \\ 2x - 7 + 2y = 37 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 13, \\ y = 9. \end{cases}$$

**Случай 2.**

$$\begin{cases} 2x - 7 - 2y = -1, \\ 2x - 7 + 2y = -37 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6, \\ y = -9. \end{cases}$$

**Случай 3.**

$$\begin{cases} 2x - 7 - 2y = 37, \\ 2x - 7 + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 13, \\ y = -9. \end{cases}$$

**Случай 4.**

$$\begin{cases} 2x - 7 - 2y = -37, \\ 2x - 7 + 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6, \\ y = 9. \end{cases}$$

Таким образом, получили следующие пары решения  $(13, 9), (13, -9), (-6, 9), (-6, -9)$ .

### Примерная схема оценивания.

1. Умножение на 4. (1 балл)
2. Выделен полный квадрат. (1 балл)
3. Получено уравнение, в котором в левой части выражение, разложенное на множители, а в правом — целое число. (2 балла)
4. Рассмотрены все 4 случая. (2 балла)
5. Правильный ответ. (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования **0 баллов**.

### 3 есеп / Задача 3

$ABC$  үшбұрышында қабырғалары  $AB = 5$ ,  $BC = 29$ ,  $AC = 30$ .  $BH$  және  $CH$  түзулері сәйкесінше  $AB$  және  $AC$  қабырғаларына перпендикуляр.  $BCH$  үшбұрышының ауданын табыңыздар.

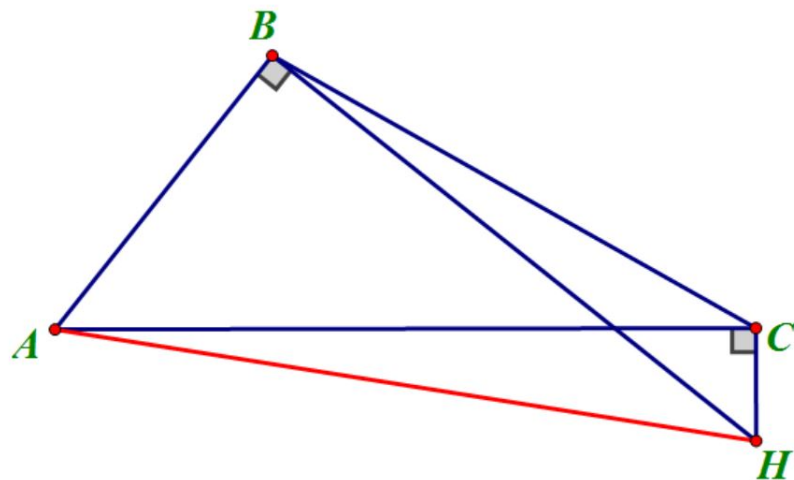
В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB = 5$ ,  $BC = 29$ ,  $AC = 30$ . Прямые  $BH$  и  $CH$  перпендикулярны соответственно сторонам  $AB$  и  $AC$ . Найдите площадь треугольника  $BCH$ .

**Ответ:**  $\frac{2431}{48}$ .

**Решение.** Заметим, что

$$AC^2 = 30^2 = 900 > AB^2 + BC^2 = 5^2 + 29^2 = 866.$$

Значит, треугольник  $ABC$  тупоугольный. Следовательно, чертёж к задаче будет выглядеть так, как показано на рисунке ниже:



Так как  $BH \perp AB$ ,  $CH \perp AC$ , то около четырёхугольника  $ABCH$  можно описать окружность. Тогда  $AH = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной около  $ABCH$  окружности.

По формуле Герона с учётом того, что  $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{5+29+30}{2} = 32$ ,

получаем

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{32 \cdot 27 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{64 \cdot 81} = 8 \cdot 9 = 72.$$

Здесь  $S_{ABC}$  означает площадь треугольника  $ABC$ .

Отсюда имеем, что

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{5 \cdot 29 \cdot 30}{4 \cdot 72} = \frac{725}{48}, \text{ и } AH = \frac{725}{24}.$$

По теореме Пифагора для треугольников  $ABH$  и  $ACH$  находим

$$BH = \sqrt{AH^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{725}{24}\right)^2 - 5^2} = \frac{715}{24},$$

$$CH = \sqrt{AH^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{725}{24}\right)^2 - 30^2} = \frac{85}{24}.$$

Через  $S_{ABH}$ ,  $S_{ACH}$  и  $S_{BCH}$  обозначим площади треугольников  $ABH$ ,  $ACH$  и  $BCH$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} S_{BCH} &= S_{ABC} + S_{ACH} - S_{ABH} = \\ &= S_{ABC} + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CH - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BH = \\ &= 72 + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{85}{24} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{715}{24} = \frac{2431}{48}. \end{aligned}$$

**Примерная схема оценивания.**

1. Показано, что треугольник  $ABC$  тупоугольный. (1 балл)
2. Показано, что около четырёхугольника  $ABCH$  можно описать окружность. (1 балл)
3. Найдена площадь  $S_{\Delta ABC}$ . (1 балл)
4. Вычислено значение  $AH$ . (1 балл)
5. Вычислено значение  $BH$ . (1 балл)
6. Вычислено значение  $CH$ . (1 балл)
7. Вычислена площадь  $S_{\Delta BCH}$ . (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.