

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ПО
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ
ПРЕДМЕТАМ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
СЕЛЬСКИХ ШКОЛ

Решения и схема оценивания
III этапа

по математике

2024-2025 учебный год, 9 класс

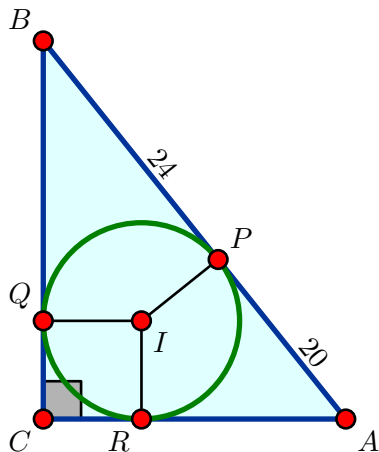
1 есеп / Задача 1

Тікбұрышты үшбұрышқа іштей сызылған шеңбер гипотенузаны ұзындықтары 20 және 24 болатын екі кесіндіге бөледі. Үшбұрыш ауданын табыңыз.

Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник делит гипотенузу на два отрезка длины 20 и 24. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 480.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$. Пусть I — центр вписанной в этот треугольник окружности, которая касается сторон AB , BC и CA соответственно в точке P , Q и R . По условию $AP = 20$, $BP = 24$.



Так как AP , AR , BP , BQ , CR , CQ касаются вписанной окружности, то $AP = AR = 20$, $BP = BQ = 24$, $CR = CQ = x$.

Поэтому $AC = 20 + x$, $BC = 24 + x$, $AB = 20 + 24 = 44$.

По теореме Пифагора

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AB^2, \\ (20 + x)^2 + (24 + x)^2 &= 44^2, \\ 2x^2 + 88x - 960 &= 0, \\ x^2 + 44x - 480 &= 0, \end{aligned}$$

$$x = -22 \pm \sqrt{22^2 + 480} = -22 \pm \sqrt{964} = -22 \pm 2\sqrt{241}.$$

Так как $x > 0$, то $x = 2\sqrt{241} - 22$.

Отсюда

$$AC = 20 + x = 2\sqrt{241} - 2, \quad BC = 24 + x = 2\sqrt{241} + 2.$$

Площадь треугольника ABC равна:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (2\sqrt{241} - 2)(2\sqrt{241} + 2) = \\ &= \frac{1}{2} ((2\sqrt{241})^2 - 2^2) = \frac{1}{2} (964 - 4) = \frac{1}{2} \cdot 960 = 480. \end{aligned}$$

Примерная схема оценивания.

1. Указано, что $AP = AR = 20$, $BP = BQ = 24$, $CR = CQ$. (1 балл)
2. Получено уравнение $(20 + x)^2 + (24 + x)^2 = 44^2$. (2 балла)
3. Получены корни уравнения $x = -22 \pm 2\sqrt{241}$. (2 балла)
4. Получено $AC = 2\sqrt{241} - 2$, $BC = 2\sqrt{241} + 2$. (1 балл)
5. Найдена площадь треугольника ABC . (1 балл)

Примечание. Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

2 есеп / Задача 2

Теңдеуді шешіңіз:

$$\left(\frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x}\right)^2 + (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0.$$

Решите уравнение:

$$\left(\frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x}\right)^2 + (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0.$$

Ответ: (1, 3).

Решение. Заметим, что $4x^2 + 12x \neq 0$, то есть $x \neq 0$ и $x \neq -3$.

Так как $\left(\frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x}\right)^2 \geq 0$ и $(x^2 + 4x - y - 2)^2 \geq 0$ при всех допустимых значениях x и y , то

$$\left(\frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x}\right)^2 + (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \left(\frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x}\right)^2 = 0, \\ (x^2 + 4x - y - 2)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x - y + 1}{4x^2 + 12x} = 0, \\ x^2 + 4x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

При допустимых значениях x и y последняя система переписывается в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x^2 + 4x - y - 2 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 + 4x - y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 + 4x - 2x - 1 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет корни $x = 1$ и $x = -3$, но $x \neq -3$, поэтому

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Примерная схема оценивания.

1. Указано, что $x \neq -3$. (1 балл)
2. Получена система $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x^2 + 4x - y - 2 = 0. \end{cases}$ (2 балла)
3. Получена система $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$ (2 балла)
4. Решено уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$. (1 балл)
5. Получен ответ (1 балл)
6. Правильный ответ без обоснования. (0 баллов)

Примечание. Правильный ответ без обоснования **0 баллов**.

3 есеп / Задача 3

$$x^2 - 10x + 4 = y^2$$

теңдеуінің барлық бүтін сан шешімдерін табыңыз.

Найдите все решения уравнения

$$x^2 - 10x + 4 = y^2$$

в целых числах.

Ответ: $(-6, -10), (-6, 10), (0, -2), (0, 2), (10, -2), (10, 2), (16, -10), (16, 10)$.

Решение. Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 4 &= y^2, \\ (x - 5)^2 - 21 &= y^2, \\ (x - 5)^2 - y^2 &= 21, \\ (x - 5 - y)(x - 5 + y) &= 21. \end{aligned}$$

Числа $(x - 5 - y)$ и $(x - 5 + y)$ являются целыми, и при этом являются делителями числа $21 = 3 \cdot 7$. Поэтому получаем следующие числа.

Случай 1.

$$\begin{cases} x - 5 - y = 1, \\ x - 5 + y = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 26 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 32, \\ 2y = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 16, \\ y = 10. \end{cases}$$

Случай 2.

$$\begin{cases} x - 5 - y = -1, \\ x - 5 + y = -21 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -12, \\ 2y = -20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6, \\ y = -10. \end{cases}$$

Случай 3.

$$\begin{cases} x - 5 - y = 21, \\ x - 5 + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 26, \\ x + y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 32, \\ 2y = -20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 16, \\ y = -10. \end{cases}$$

Случай 4.

$$\begin{cases} x - 5 - y = -21, \\ x - 5 + y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = -16, \\ x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -12, \\ 2y = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6, \\ y = 10. \end{cases}$$

Случай 5.

$$\begin{cases} x - 5 - y = 3, \\ x - 5 + y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 20, \\ 2y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 10, \\ y = 2. \end{cases}$$

Случай 6.

$$\begin{cases} x - 5 - y = -3, \\ x - 5 + y = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = -2. \end{cases}$$

Случай 7.

$$\begin{cases} x - 5 - y = 7, \\ x - 5 + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 12, \\ x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 20, \\ 2y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 10, \\ y = -2. \end{cases}$$

Случай 7.

$$\begin{cases} x - 5 - y = -7, \\ x - 5 + y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = -2, \\ x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, получаем следующие пары решения $(-6, -10), (-6, 10), (0, -2), (0, 2), (10, -2), (10, 2), (16, -10), (16, 10)$.

Примерная схема оценивания.

1. Выделен полный квадрат. (1 балл)
2. Получено уравнение, в котором в левой части выражение, разложенное на множители, а в правом — целое число. (2 балла)
3. Рассмотрены все 8 случаев. (3 балла)
4. Правильный ответ. (1 балл)

Примечание. Правильный ответ без обоснования 0 баллов.