8-сыныптың жауаптары мен бағалау критерийі / Ответы и критерии оценивания за 8 класс

1. 88

2. 6

3. 166

4. $\frac{5}{54}$

5. $15 - \frac{7\pi}{2} \approx 4$

6. $\frac{2}{5}$

7. 3

8. 120°

9. 1

10. $\frac{120}{7}$

11. **Қазақша:**

2×2 өлшемді шаршыны қайта бояғанда, егер ішінде b қара және $4-b$ ақ шаршы болса, онда бояудан кейін $4-b$ қара және b ақ шаршы болады. Қара шаршылар санының өзгерісі келесі формуламен есептеледі:

$$|(4-b)-b| = |4-2b|,$$

яғни бұл сан **жұп сан** болады.
Сондықтан, қара шаршылар санының **парлығы өзгермейді**.

Бастапқыда 32 қара шаршы болған – бұл **жұп сан**. Демек, әрқашан жұп болып қалады.

Бір ғана қара шаршы жасау мүмкін емес.

Бағалау критерийі (6 балл):

- Қара шаршылар санының жұп болып қалатынын дәлелдейтін инвариантты тапты — 5 балл
- Толық, дұрыс шешім ұсынды — 1 балл

На русском:

При перекрашивании квадрата размером 2×2, если в нём было b чёрных и $4-b$ белых клеток, после перекраски станет $4-b$ чёрных и b белых клеток. Изменение количества чёрных клеток:

$$|(4-b)-b| = |4-2b|,$$

что является **чётным числом**.
Следовательно, **чётность количества чёрных клеток не меняется**.

Изначально было 32 чёрных клетки — чётное число. Значит, оно всегда останется чётным.

Получить одну чёрную клетку невозможно.

Критерий оценивания (6 баллов):

- Нашёл инвариант, показывающий, что количество чёрных клеток всегда чётное — 5 баллов
- Представил полное и корректное решение — 1 балл

12. Қазақша:

a және b сандарының 3-ке бөлгендегі барлық мүмкін қалдықтарын қарастырайық.

Мүмкін мәндер: 0, 1, 2.

$a^2 + ab + b^2 \mod 3$ өрнегінің мәндерін кестеге түсірейік:

$a \bmod 3$	$b \bmod 3$	$a^2 + ab + b^2 \bmod 3$
0	0	0
0	1	1
0	2	1
1	0	1
1	1	0
1	2	1
2	0	1
2	1	1
2	2	0

Кестеден байқағанымыз: $a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod 3$ тек келесі жағдайларда орындалады:

$$(a \equiv b \equiv 0), \quad (a \equiv b \equiv 1), \quad (a \equiv b \equiv 2) \mod 3.$$

$a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ болғанда $a^2 + ab + b^2$ өрнегі 9-ға бөлінетінін тексерейік.

$a = 3m + 1$, $b = 3n + 1$ деп алайық. Онда:

$$\begin{aligned} a^2 &= (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1, \\ ab &= (3m+1)(3n+1) = 9mn + 3m + 3n + 1, \\ b^2 &= (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1. \end{aligned}$$

Қосайық:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= 9m^2 + 6m + 1 + 9mn + 3m + 3n + 1 + 9n^2 + 6n + 1 \\ &= 9(m^2 + mn + n^2) + 9m + 9n + 3. \end{aligned}$$

Бұл өрнек 9 бойынша 3-ке тең: $\equiv 3 \pmod 9$, демек, 9-ға бөлінбейді.

$a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$ болғанда да осындай нәтиже шығады.

Соңғы мүмкін нұсқа: $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$.

$a = 3m$, $b = 3n$ болғанда:

$$a^2 + ab + b^2 = 9m^2 + 9mn + 9n^2 = 9(m^2 + mn + n^2),$$

яғни 9-ға бөлінеді.

Қорытынды: егер $9 \mid (a^2 + ab + b^2)$ болса, онда $3 \mid a$ және $3 \mid b$.

Бағалау критерийі (6 балл):

- Барлық қалдық комбинацияларын қарастырды және кесте құрды — 2 балл
- 3-ке бөлінуге толыққанды талдау жасады (барлық үш жағдайды талдау) — 3 балл
- 9-ға бөлінетін жалғыз жағдайды дәлелдеді — 1 балл

На русском:

Рассмотрим все возможные остатки от деления a и b на 3.

Возможные значения: 0, 1, 2.

Построим таблицу значений выражения $a^2 + ab + b^2 \mod 3$:

$a \bmod 3$	$b \bmod 3$	$a^2 + ab + b^2 \bmod 3$
0	0	0
0	1	1
0	2	1
1	0	1
1	1	0
1	2	1
2	0	1
2	1	1
2	2	0

Из таблицы видно, что $a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod 3$ только в случаях:

$$(a \equiv b \equiv 0), \quad (a \equiv b \equiv 1), \quad (a \equiv b \equiv 2) \mod 3.$$

Проверим делимость на 9 в случае $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$.

Пусть $a = 3m + 1$, $b = 3n + 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} a^2 &= (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1, \\ ab &= (3m+1)(3n+1) = 9mn + 3m + 3n + 1, \\ b^2 &= (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1. \end{aligned}$$

Сложим:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= 9m^2 + 6m + 1 + 9mn + 3m + 3n + 1 + 9n^2 + 6n + 1 \\ &= 9(m^2 + mn + n^2) + 9m + 9n + 3. \end{aligned}$$

Это выражение $\equiv 3 \pmod 9$, то есть на 9 не делится.

Аналогично в случае $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$.

Остается один случай: $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$.

Если $a = 3m$, $b = 3n$, то:

$$a^2 + ab + b^2 = 9m^2 + 9mn + 9n^2 = 9(m^2 + mn + n^2),$$

что действительно делится на 9.

Вывод: если $9 \mid (a^2 + ab + b^2)$, то $3 \mid a$ и $3 \mid b$.

Критерий оценивания (6 баллов):

- Рассмотрены все возможные остатки и составлена таблица — 2 балла
- Проведён корректный анализ делимости на 3 во всех трёх случаях — 3 балла
- Доказан единственный случай делимости на 9 — 1 балл

13. Қазақша:

Қайшылық арқылы дәлелдеу жүргізейік. Үш квадрат теңдеудің дискриминанттары теріс немесе нөлге тең болсын деп алайық:

$$a_i^2 \leq b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Онда:

$$(a_1 a_2 a_3)^2 \leq b_1 b_2 b_3.$$

Бірақ $b_1 b_2 b_3 = a_1 a_2 a_3$, сондықтан:

$$(a_1 a_2 a_3)^2 \leq a_1 a_2 a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1 a_2 a_3 \leq 1.$$

Алайда бұл $a_1 a_2 a_3 > 1$ деген шартқа қайшы. Сондықтан бастапқы болжамымыз дұрыс емес.

Қорытынды: Кем дегенде бір квадрат теңдеудің дискриминанты оң болуға тиіс.

Бағалау критерийі (6 балл):

- Дискриминант шартын дұрыс жазды ($a_i^2 \leq b_i$) — 2 балл
- Көбейту арқылы тұжырым жасады ($\prod a_i^2 \leq \prod b_i$) — 2 балл
- Абсурдқа алып келгенін нақты көрсетті ($a_1 a_2 a_3 \leq 1$ қайшылықты) — 2 балл

На русском:

Докажем от противного. Предположим, что дискриминанты всех трёх квадратных уравнений неположительны:

$$a_i^2 \leq b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Тогда:

$$(a_1 a_2 a_3)^2 \leq b_1 b_2 b_3.$$

Но по условию $b_1b_2b_3 = a_1a_2a_3$, следовательно:

$$(a_1a_2a_3)^2 \leq a_1a_2a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1a_2a_3 \leq 1.$$

Это противоречит условию $a_1a_2a_3 > 1$.

Вывод: хотя бы одно квадратное уравнение должно иметь положительный дискриминант.

Критерий оценивания (6 баллов):

- Правильно записал условие для дискриминанта ($a_i^2 \leq b_i$) — 2 балла
- Корректно сделал вывод путём перемножения ($\prod a_i^2 \leq \prod b_i$) — 2 балла
- Ясно показал противоречие, ведущее к абсурду ($a_1a_2a_3 \leq 1$ при > 1) — 2 балла