

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ПО  
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ  
ПРЕДМЕТАМ  
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ  
СЕЛЬСКИХ ШКОЛ

Решения и схема оценивания  
III этапа

по математике

2024-2025 учебный год, 10 класс

#### 4 есеп / Задача 4

Асқар мен Болат мынандай ойын ойнауда, Асқар бастайды. Балалар өлшемі  $4 \times 4$  торлы тақтаға кезектесіп өлшемі  $2 \times 1$  плитканы бір-бірден қояды: Асқар — тік, ал Болат — көлденең. Плиткалар тақта торларына дәл қойылуы тиіс: ешқандай плитка тақтаның екі торларынан басқа торды ішінара да жаппауға тиіс, оған дейін қойылған плитканы жабуға және де тақта шекарасынан шығуға болмайды. Ойын қандайда бір ойыншы жүріс жасай алмайтын жағдайға жеткенше жалғасады. Соңғы жүріс жасаған ойыншы жеңеді. Дұрыс ойында кім жеңеді?

Асқар и Болат играют в следующую игру, начинается Асқар. Ребята по очереди кладут на клетчатую доску размером  $4 \times 4$  по одной плитке размером  $2 \times 1$ : Асқар кладёт вертикально, Болат — горизонтально. Плитки разрешается класть ровно на клетки доски так, чтобы ни одна плитка даже частично не покрывала более двух клеток доски, не перекрывала никакую другую уже положенную плитку и не вылезала за пределы доски. Игра продолжается до тех пор, пока какой-то игрок не сможет сделать ход. Игрок, сделавший последний ход выигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

**Ответ::** Асқар.

**Решение.** У Аскара есть выигрышная стратегия. Покажем это.

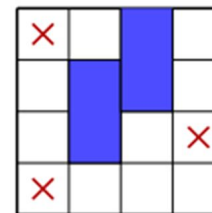
Цель Аскара в этой стратегии – гарантировать возможность положить 4 плитки (если это необходимо) по одной в каждую колонку, ограничив при этом ходы Болата тремя. Это позволит Аскару сделать последний ход.

Своим первым ходом Асқар кладёт свою плитку в середину второй колонки. Неважно, куда Болат положит свою плитку, своим вторым ходом Асқар кладёт свою плитку в третью колонку (или на две верхних клетки, или на две нижних). Это возможно, так как Болат не сможет перекрыть оба варианта.

Действуя таким образом, Асқар резервирует себе две свободные соседние клетки в первом столбце и две свободные клетки в четвёртом столбце. Болат не сможет их заблокировать (Болат не сможет положить на них свои плитки). Следовательно Асқар гарантирует себе ещё мини-

мум два хода. Минимум четыре хода в целом.

На рисунке закрашенные клетки показывают первые два хода Аскара.



Чтобы определить как Аскару ходить третий раз, рассмотрим клетки, помеченные на рисунке крестиками: верхняя левая, нижняя левая и одна из двух клеток в середине правой колонки, не соседняя с клетками, покрытыми плиткой Аскара.

Болат сделал только два хода, поэтому он не мог покрыть все три крестика. Третьим ходом Асқар должен заблокировать один из крестиков.

Перед третьим ходом Аскара уже заблокированы для Болата четыре клетки (две в левой и две в правой колонках), плюс третьим ходом Асқар блокирует один из крестиков.

Таким образом, Болат не может поставить свои плитки на 4 клетки покрытые плитками Аскара за первые два хода, на 4 заблокированные клетки в левой и правой колонках и 1 заблокированный крестик (всего 9). Значит, Болат сможет занять не более  $16 - 9 = 7$  клеток. Этого хватит максимум на три плитки. В то время, как Асқар гарантировал себе 4 хода, выигрывая в этой игре.

#### Примерная схема оценивания.

1. Приведена правильная стратегия. (3 балла)
2. Доказательство, что стратегия работает. (3 балла)
3. Получен правильный ответ. (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

## 5 есеп / Задача 5

Теңдеулер жүйесін шешіңіз: 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = |3y - 1|, \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{cases}$$

Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = |3y - 1|, \\ 4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ .

**Решение.** Рассмотрим второе уравнение системы:

$$4\sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0.$$

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{(3y - 1)^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} &= 0, \\ 4|3y - 1| + \sqrt{x^2 - 4x + 3} &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $4|3y - 1| \geq 0$  и  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ , то

$$4|3y - 1| + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4|3y - 1| = 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - 1 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = \frac{1}{3}, \end{cases} \end{cases}$$

Подставим полученные решения в первое уравнение системы.

(1) Пусть  $x = 1, y = \frac{1}{3}$ . Подставив в первое уравнение системы, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 - 3} &= \left| 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \right|, \\ \sqrt{0} &= 0, \\ 0 &= 0 \text{ (истина)}. \end{aligned}$$

Таким образом, пара чисел  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  является решением системы.

(2) Пусть  $x = 3, y = \frac{1}{3}$ . Подставив в первое уравнение системы, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 - 3} &= \left| 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \right|, \\ \sqrt{12} &= 0, \text{ (ложно)}. \end{aligned}$$

Таким образом, пара чисел  $\left(3, \frac{1}{3}\right)$  не является решением системы.

Итак, система имеет единственное решение  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ .

### Примерная схема оценивания.

1. Получено уравнение  $4|3y - 1| + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0$ . (1 балл)
2. Получена система  $\begin{cases} 4|3y - 1| = 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0 \end{cases}$  (2 балла)
3. Решена система. (2 балла)
4. Проведена проверка. (1 балл)
5. Правильный ответ. (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

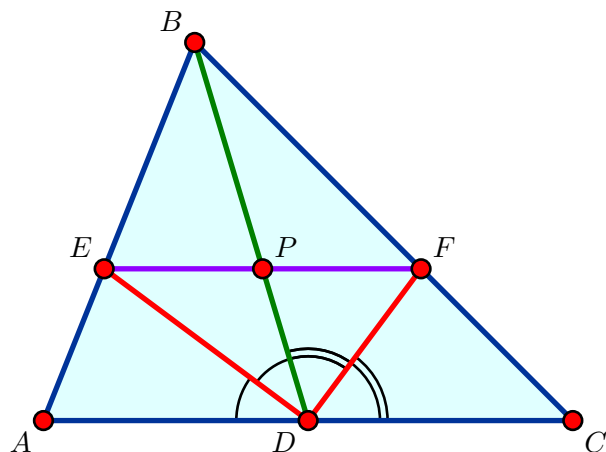
# 6 есеп / Задача 6

$ABC$  үшбұрышында  $BD$  медианасы жүргізілген, ал  $ABD$  және  $CBD$  үшбұрыштарында сәйкесінше  $DE$  және  $DF$  биссектрисалары жүргізілген.  $EF$  және  $BD$  кесінділері  $P$  нүктесінде қиылысады.  $\frac{EF}{DP}$  қатынасын табыңыз.

В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BD$ . В треугольниках  $ABD$  и  $CBD$  проведены соответственно биссектрисы  $DE$  и  $DF$ . Отрезки  $EF$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Найти отношение  $\frac{EF}{DP}$ .

**Ответ:** 2.

**Решение.**



По свойству биссектрисы треугольника из треугольников  $ABD$  и  $BCD$  получаем:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD}, \quad \frac{CF}{BF} = \frac{CD}{BD}.$$

Так как  $BD$  — медиана, то  $AD = CD$ . Следовательно,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{BD} = \frac{CF}{BF}.$$

Так как  $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF}$ , то  $EF \parallel AC$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \angle DEP &= \angle EDA = \angle EDP, \\ \angle DFP &= \angle FDC = \angle FDP. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что треугольники  $DPE$  и  $DPF$  равнобедренные, при этом

$$EP = DP, \quad FP = DP.$$

Значит,  $EF = EP + FP = 2DP$ , то есть  $\frac{EF}{DP} = 2$ .

**Примерная схема оценивания.**

1. Показано, что  $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF}$  и / или, что  $EF \parallel AC$ . (3 балла)
2. Показано, что  $EP = FP = DP$ . (3 балла)
3. Получен правильный ответ. (1 балл)

**Примечание.** Правильный ответ без обоснования 0 баллов.