

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ПО
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ
ПРЕДМЕТАМ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
СЕЛЬСКИХ ШКОЛ

Решения и схема оценивания
III этапа

по математике

2024-2025 учебный год, 11 класс

4 есеп / Задача 4

Есептеңіз: $\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \dots \cdot \cos \frac{14\pi}{15}$.

Вычислите: $\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \dots \cdot \cos \frac{14\pi}{15}$.

Ответ: $-\frac{1}{2^{14}} = -\frac{1}{16384}$.

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} X &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \dots \cdot \cos \frac{14\pi}{15} = \\ &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \cdot \\ &\cdot \cos \frac{8\pi}{15} \cdot \cos \frac{9\pi}{15} \cdot \cos \frac{10\pi}{15} \cdot \cos \frac{11\pi}{15} \cdot \cos \frac{12\pi}{15} \cdot \cos \frac{13\pi}{15} \cdot \cos \frac{14\pi}{15} = \\ &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \cdot \\ &\cdot \left(-\cos \frac{7\pi}{15}\right) \cdot \left(-\cos \frac{6\pi}{15}\right) \cdot \left(-\cos \frac{5\pi}{15}\right) \cdot \left(-\cos \frac{4\pi}{15}\right) \cdot \\ &\cdot \left(-\cos \frac{3\pi}{15}\right) \cdot \left(-\cos \frac{2\pi}{15}\right) \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{15}\right) = \\ &= -\cos^2 \frac{\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{4\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{6\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{7\pi}{15}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}, \\ B &= \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15}. \end{aligned}$$

Тогда $X = -A^2 \cdot B^2$.

Вычислим

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} = -\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} = \\ &= -\frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15}}{\sin \frac{\pi}{15}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15}}{2 \sin \frac{\pi}{15}} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15}}{4 \sin \frac{\pi}{15}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{16\pi}{15}}{16 \sin \frac{\pi}{15}} = \frac{\sin \frac{\pi}{15}}{16 \sin \frac{\pi}{15}} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} B &= \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} = \frac{\sin \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15}}{\sin \frac{3\pi}{15}} = \\ &= \frac{\sin \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15}}{2 \sin \frac{3\pi}{15}} = \frac{\sin \frac{12\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15}}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} = \\ &= \frac{\sin \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15}}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} = \frac{\cos \frac{5\pi}{15}}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, $X = -A^2 \cdot B^2 = -\frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{2^6} = -\frac{1}{2^{14}} = -\frac{1}{16384}$.

Примерная схема оценивания.

1. Показано, что исходное выражение равно

$$-\cos^2 \frac{\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{4\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{6\pi}{15} \cdot \cos^2 \frac{7\pi}{15}. \quad (2 \text{ балла})$$

2. Показано, что $A = \frac{1}{16}$ (2 балла)

3. Показано, что $B = \frac{1}{8}$ (2 балла)

4. Получен правильный ответ. (1 балл)

Примечание. Правильный ответ без обоснования **0 баллов**.

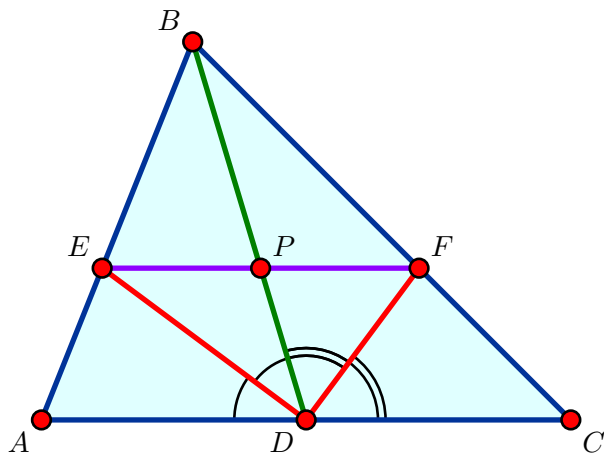
5 есеп / Задача 5

ABC үшбұрышында BD медианасы жүргізілген, ал ABD және CBD үшбұрыштарында сәйкесінше DE және DF биссектрисалары жүргізілген. EF және BD кесінділері P нүктесінде қиылысады. $\frac{EF}{DP}$ қатынасын табыңыз.

В треугольнике ABC проведена медиана BD . В треугольниках ABD и CBD проведены соответственно биссектрисы DE и DF . Отрезки EF и BD пересекаются в точке P . Найти отношение $\frac{EF}{DP}$.

Ответ: 2.

Решение.



По свойству биссектрисы треугольника из треугольников ABD и BCD получаем:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD}, \quad \frac{CF}{BF} = \frac{CD}{BD}.$$

Так как BD — медиана, то $AD = CD$. Следовательно,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{BD} = \frac{CF}{BF}.$$

Так как $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF}$, то $EF \parallel AC$. Отсюда

$$\begin{aligned} \angle DEP &= \angle EDA = \angle EDP, \\ \angle DFP &= \angle FDC = \angle FDP. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что треугольники DPE и DPF равнобедренные, при этом

$$EP = DP, \quad FP = DP.$$

Значит, $EF = EP + FP = 2DP$, то есть $\frac{EF}{DP} = 2$.

Примерная схема оценивания.

1. Показано, что $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF}$ и / или, что $EF \parallel AC$. (3 балла)
2. Показано, что $EP = FP = DP$. (3 балла)
3. Получен правильный ответ. (1 балл)

Примечание. Правильный ответ без обоснования 0 баллов.

6 есеп / Задача 6

a, b, c нақты сандары келесі теңдікті қанағаттардырады:

$$a + b + c = 3.$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 3 + ab + bc + ca.$$

теңсіздігін дәлелдеңіз.

Действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству:

$$a + b + c = 3.$$

Докажите неравенство:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 3 + ab + bc + ca.$$

Доказательство. Докажем, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

Действительно, для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y.$$

Отсюда следует требуемое неравенство. Применим это неравенство несколько раз:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b,$$

$$b^2 + c^2 + 1 \geq bc + b + c,$$

$$c^2 + a^2 + 1 \geq ca + c + a.$$

Сложим эти неравенства:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3 \geq (ab + bc + ca) + 2(a + b + c).$$

Так как $a + b + c = 3$, то

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3 \geq (ab + bc + ca) + 6.$$

Отсюда

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 3 + ab + bc + ca.$$

Примерная схема оценивания.

1. Доказано неравенство $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$. (3 балла)

2. Завершение доказательства. (4 балла)