

Жаратылыстану-математикалық бағыттағы пәндер бойынша
XVIII ПРЕЗИДЕНТТІК ОЛИМПИАДА
Математика пәнінен бірінші (өңірлік) кезең
ШЕШІМДЕРІ

1-есеп. Айгүлдің бойы — 170 см, Арманның бойы — 180 см және олар бір сыныпта оқиды. Сыныптағы қыздардың орташа бойы — 165 см, ал ұлдардың орташа бойы — 175 см. Егер Айгүл мен Арманнан басқа барлық оқушылардың орташа бойы 170 см болса, сыныпта ұлдар қыздардан нешеге көп?

Шешімі. x – сыныптағы ұлдардың саны, y – қыздардың саны болсын. Онда, ұлдардың бойларының қосындысы $175x$ -ке, ал қыздардың бойларының қосындысы $165y$ -ке тең болады.

(1 ұпай)

Айгүл мен Арманнан басқа оқушылардың орташа бойын есептейік:

$$\frac{175x - 180 + 165y - 170}{x - 1 + y - 1}.$$

Демек:

$$170 = \frac{175x + 165y - 350}{x + y - 2}$$

(3 ұпай)

$$\Rightarrow 170x + 170y - 340 = 175x + 165y - 350 \Rightarrow 5x - 5y = 10 \Rightarrow x - y = 2.$$

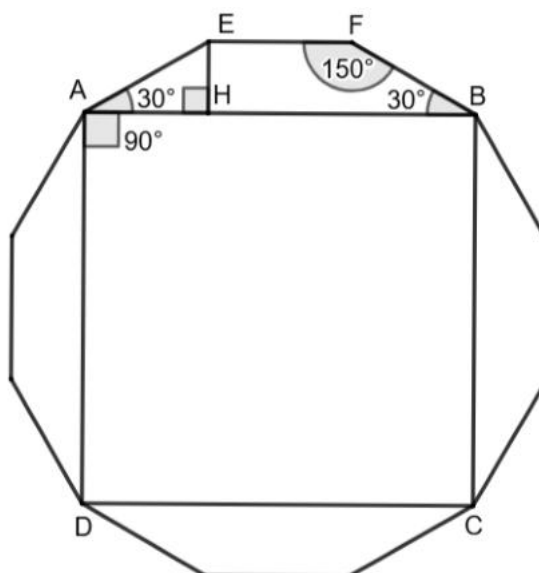
(1 ұпай)

Жауабы: 2.

2-есеп. Қабырғасы 1-ге тең шаршының әрбір қабырғасына сырттай теңбүйірлі трапециялар салынды. Егер осы трапециялардың төбелері дұрыс он екібұрыштың төбелерін құраса, онда он екібұрыштың периметрін табыңыз.

Шешімі. Дұрыс он екібұрыштың әрбір ішкі бұрышы $\frac{(12-2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$ болғандықтан, трапециялардың тең кіші бұрыштары 30° -қа тең болады.

(1 ұпай)



Суреттегідей EH – E -ден AB -ға түсірілген перпендикуляр. Дұрыс он екібұрыштың қабырғаларының ұзындығы x болсын, демек $AE = EF = FB = x$. Онда,

$$AH = \frac{AB - EF}{2} = \frac{1 - x}{2}.$$

(1 ұпай)

Екінші жағынан, AEN тікбұрышты үшбұрышында $\angle HAE = 30^\circ$ болғандықтан:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{AE} = \frac{AH}{x} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

(1 ұпай)

Демек,

$$AH = \frac{1-x}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \text{ Онда, периметр: } P = 12x = 6\sqrt{3} - 6 \text{ болады.}$$

(2 ұпай)

Жауабы: $6\sqrt{3} - 6$.

3-есеп. $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x$ теңдеуінің $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ аралығында жататын барлық шешімдерін табыңыз.

Шешімі 1. $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ формуласын қолданып теңдеуді түрлендіріп келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right)}{2} = \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x$$

(1 ұпай)

Теңдеудің оң жағын $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = 2x$ деп алып, $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ формуласымен түрлендіреміз. Сонда:

$$1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = -1.$$

(2 ұпай)

Егер $\cos \theta = -1$ болса, $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ болуы керек екені түсінікті. Демек:

$$2x + \frac{\pi}{9} = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{9} + k\pi$$

(1 ұпай)

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан тек $k = 0$ бола алды. Олай болса, $x = \frac{4\pi}{9}$ болады.

(1 ұпай)

Жауабы: $x = \frac{4\pi}{9}$.

Шешімі 2. Теңдеудің сол жағын $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ формуласымен, ал оң жағын $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ формуласымен, $\frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{18}$ деп алып түрлендіреміз.

$$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin x \sin \frac{\pi}{18}\right)^2 = 4 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

(1 ұпай)

$$\cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{18} + 2 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{18} = 4 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{18} - 2 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{18} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{18} - \sin x \sin \frac{\pi}{18}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{18} - \sin x \sin \frac{\pi}{18} = 0.$$

(2 ұпай)

$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ формуласын қолданып, $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = 0$ теңдігін аламыз.

$\cos \theta = 0$ болса, $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ болатыны түсінікті. Демек:

$$x + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{9} + k\pi$$

(1 ұпай)

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ болғандықтан тек $k = 0$ бола алды. Олай болса, $x = \frac{4\pi}{9}$ болады.

(1 ұпай)

Жауабы: $x = \frac{4\pi}{9}$.

4-есеп. Төмендегі теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын барлық (a, b, c) бүтін сандар үштіктерін табыңыз:

$$\begin{cases} a + b = c, \\ b \cdot c = a. \end{cases}$$

Шешімі. Екінші теңдеуді бірінші теңдікке қоямыз: $\begin{cases} a + b = c \\ b \cdot c = a \end{cases} \Rightarrow bc + b = c$.

$$bc + b = c \Leftrightarrow b(c + 1) - c = 0 \Leftrightarrow b(c + 1) - (c + 1) = (b - 1)(c + 1) = -1.$$

(3 ұпай)

-1 санының бүтін бөлгіштері -1 және 1 сандары. Демек, келесі екі жағдайды қарастырсақ жеткілікті:

$$1) \begin{cases} b - 1 = -1 \\ c + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0. (a, b, c) = (0, 0, 0) \text{ үштігі жүйені қанағаттандырады.}$$

(1 ұпай)

$$2) \begin{cases} b - 1 = 1 \\ c + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow a = bc = -4. (a, b, c) = (-4, 2, -2) \text{ үштігі де берілген теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.}$$

(1 ұпай)

Жауабы: $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (-4, 2, -2)\}$.

5-есеп. $\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{f(1)}{g(1)} = -2$ теңдігін қанағаттандыратын $f(x)$ және $g(x)$ квадрат үшмүшелері берілген.

Егер $f(3) = 36, f(2) = 17$ және $g(2) = -1$ болса, $g(3)$ -тің мәнін табыңыз.

Шешімі. $h(x) = f(x) + 2g(x)$ үшмүшесін қарастырайық.

(1 ұпай)

Есеп шартынан $h(1) = h(-1) = 0$ болатынын байқаймыз. Демек, $h(x) = a(x - 1)(x + 1)$ түрінде болады.

(1 ұпай)

$$h(2) = f(2) + 2g(2) = 17 - 2 = 15 = a(2 - 1)(2 + 1) \Rightarrow a = 5.$$

(1 ұпай)

$$h(3) = f(3) + 2g(3) = 36 + 2g(3) = 5(3 - 1)(3 + 1) = 40 \Rightarrow g(3) = 2.$$

(2 ұпай)

Жауабы: $g(3) = 2$.

XVIII ПРЕЗИДЕНТСКАЯ ОЛИМПИАДА
по предметам естественно-математического цикла

Первый (региональный) этап по математике

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Айгуль и Арман учатся в одном классе. Рост Айгуль — 170 см, рост Армана — 180 см. Средний рост девочек в классе — 165 см, а средний рост мальчиков — 175 см. Если средний рост всех учеников, кроме Айгуль и Армана, равен 170 см, то на сколько мальчиков в классе больше, чем девочек?

Решение. Пусть x — число мальчиков в классе, а y — число девочек. Тогда сумма ростов мальчиков равна $175x$, а сумма ростов девочек — $165y$.

(1 балл)

Вычислим средний рост всех учеников, кроме Айгуль и Армана:

$$\frac{175x - 180 + 165y - 170}{x - 1 + y - 1}.$$

Следовательно,

$$170 = \frac{175x + 165y - 350}{x + y - 2}.$$

(3 балла)

Отсюда

$$170x + 170y - 340 = 175x + 165y - 350 \Rightarrow 5x - 5y = 10 \Rightarrow x - y = 2.$$

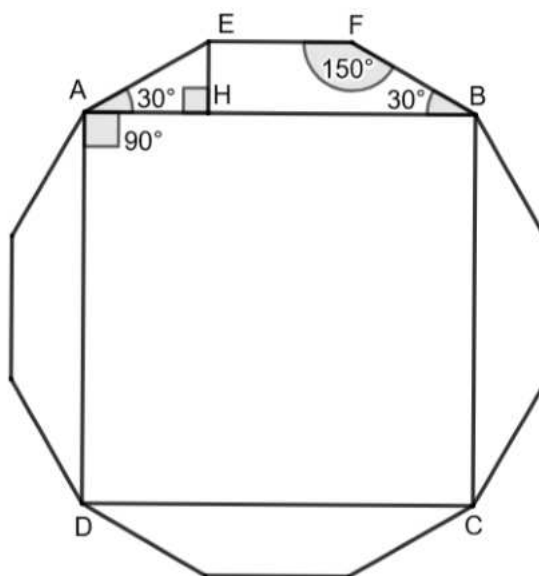
(1 балл)

Ответ: 2.

Задача 2. Дан квадрат со стороной 1. На каждой его стороне внешним образом построены равнобокие трапеции. Если вершины этих трапеций образуют вершины правильного двенадцатиугольника, найдите периметр данного двенадцатиугольника.

Решение. Так как каждый внутренний угол правильного двенадцатиугольника равен $\frac{(12-2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$, то меньшие углы трапеций равны 30° .

(1 балл)



EH — это перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AB (см.рис.). Пусть длина стороны правильного двенадцатиугольника равна x , следовательно, $AE = EF = FB = x$. Тогда,

$$AH = \frac{AB - EF}{2} = \frac{1 - x}{2}.$$

(1 балл)

С другой стороны, в прямоугольном треугольнике AEN , где $\angle HAE = 30^\circ$, имеем:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{AE} = \frac{AH}{x} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

(1 балл)

Следовательно,

$$AH = \frac{1-x}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \text{ Периметр: } P = 12x = 6\sqrt{3} - 6.$$

(2 балла)

Ответ: $6\sqrt{3} - 6$.

Задача 3. Найдите все корни уравнения $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x$, на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение 1. Используя формулу $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, преобразуем уравнение и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right)}{2} &= \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x \Leftrightarrow \\ 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) &= 2 \sin \frac{\pi}{9} \sin 2x \end{aligned}$$

(1 балл)

Правую часть уравнения преобразуем по формуле $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, где $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\beta = 2x$. Тогда:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) \Leftrightarrow \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) &= -1. \end{aligned}$$

(2 балла)

Известно, что если $\cos \theta = -1$, то $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно:

$$2x + \frac{\pi}{9} = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{9} + k\pi$$

(1 балл)

Поскольку $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, единственное подходящее значение — это $k = 0$. Следовательно, $x = \frac{4\pi}{9}$.

(1 балл)

Ответ: $x = \frac{4\pi}{9}$.

Решение 2. Левую часть уравнения преобразуем, используя формулу $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, с помощью $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ и заметим, что $\frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{18}$.

$$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin x \sin \frac{\pi}{18}\right)^2 = 4 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

(1 балл)

$$\cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{18} + 2 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{18} = 4 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{18} - 2 \sin x \sin \frac{\pi}{18} \cos x \cos \frac{\pi}{18} + \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{18} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{18} - \sin x \sin \frac{\pi}{18}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{18} - \sin x \sin \frac{\pi}{18} = 0.$$

(2 балла)

Используя формулу $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, мы получаем равенство $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = 0$.

Известно, что если $\cos \theta = 0$, то $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно:

$$x + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{9} + k\pi$$

(1 балл)

Так как $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, только $k = 0$ является подходящим значением. Следовательно, $x = \frac{4\pi}{9}$.

(1 балл)

Ответ: $x = \frac{4\pi}{9}$.

Задача 4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) , удовлетворяющих системе уравнений:

$$\begin{cases} a + b = c, \\ b \cdot c = a. \end{cases}$$

Решение. Подставим $a = bc$ из второго уравнения в первое: $\begin{cases} a + b = c \\ b \cdot c = a \end{cases} \Rightarrow bc + b = c$.

$$bc + b = c \Leftrightarrow b(c + 1) - c = 0 \Leftrightarrow b(c + 1) - (c + 1) = (b - 1)(c + 1) = -1.$$

(3 балла)

Число -1 имеет только два целых делителя: -1 и 1 . Следовательно, достаточно рассмотреть два случая:

$$1) \begin{cases} b - 1 = -1 \\ c + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0. \text{ Тройка } (a, b, c) = (0, 0, 0) \text{ удовлетворяет системе уравнений.}$$

(1 балл)

$$2) \begin{cases} b - 1 = 1 \\ c + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow a = bc = -4. \text{ Тройка } (a, b, c) = (-4, 2, -2) \text{ также является решением.}$$

(1 балл)

Ответ: $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (-4, 2, -2)\}$.

Задача 5. Даны квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие равенству $\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{f(1)}{g(1)} = -2$. Если известно, что $f(3) = 36$, $f(2) = 17$ и $g(2) = -1$, найдите значение $g(3)$.

Решение. Рассмотрим трёхчлен $h(x) = f(x) + 2g(x)$.

(1 балл)

Из условия задачи видно, что $h(1) = h(-1) = 0$. Следовательно, $h(x) = a(x - 1)(x + 1)$.

(1 балл)

$$h(2) = f(2) + 2g(2) = 17 - 2 = 15 = a(2 - 1)(2 + 1) \Rightarrow a = 5.$$

(1 балл)

$$h(3) = f(3) + 2g(3) = 36 + 2g(3) = 5(3 - 1)(3 + 1) = 40 \Rightarrow g(3) = 2.$$

(2 балла)

Ответ: $g(3) = 2$.